THE
ABEL
PRIZE
2016

挪威科学与文学院决定将 2016 年阿贝尔奖授予牛津大学的
安德鲁·怀尔斯爵士 (Sir Andrew J. Wiles)

“他通过半稳定椭圆曲线具有模性质的猜想，令人惊叹地证明了费马大定理，从而在数论领域开创了一个新时代。”

数论这一古老而又美丽的数学分支涉及的是整数运算性质的研究。在其现代形式中，该主题在本质上与复杂的分析、代数几何以及表示理论密切相关。数论最终会通过通信、金融交易和数字安全的加密算法在我们的日常生活中发挥重要作用。

费马大定理由皮埃尔·德·费马 (Pierre de Fermat) 在 17 世纪首次提出，该定理断言当 $n>2$ 时，方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解。费马本人证明了 $n=4$ 的情形，莱昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler) 证明了 $n=3$ 的情形，苏菲·姬曼 (Sophie Germain) 证明了适用于无穷多素数指数的第一个一般性结果。恩斯特·库默尔 (Ernst Kummer) 对这一问题的研究揭示了代数数论中的几个基本概念，例如理想数和唯一因子分解定理。安德鲁·怀尔斯发现的完整证明依赖于数论中另外三个概念，即椭圆曲线、模形式和伽罗瓦 (Galois) 表示。

椭圆曲线是通过由两个变量构成的三次方程定义的。它们属于尼尔斯·亨利克·阿贝尔 (Niels Henrik Abel) 提出的椭圆函数这一概念的自然范畴里。模形式是在复平面上的上半部分定义的高度对称的解析函数，并通过称为模曲线的形状自然表示出来。椭圆曲线如果能够通过这些模曲线之一的映射而参数化，就会被认为是模的。模性质猜想由志村五郎 (Goro Shimura)、谷山丰 (Yutaka Taniyama) 和安德烈·韦伊 (André Weil)在 20 世纪 50-60 年代提出，声称在有理数范围内定义的每个椭圆曲线都是模的。

1984 年，格哈德·弗雷 (Gerhard Frey) 将半稳定椭圆曲线与费马大定理的任何假设反例关联起来，并强烈地感觉到此椭圆曲线不会是模的。弗雷的非模性在 1986 年由肯尼斯·瑞贝 (Kenneth Ribet) 通过让-皮埃尔·塞尔 (Jean-Pierre Serre) 的 ε-猜想所证实。因此，证明了志村-谷山-韦伊的半稳定椭圆曲线的模性质猜想也就证明了费马大定理。然而，当时模性质猜想被广泛认为是完全不可理解的。因此，当安德鲁·怀尔斯在他 1995 年发表的突破性论文中介绍他的模性提升技术，并证明半稳定情形下的模性质猜想之后，他在这方面取得了惊人的进展。

怀尔斯的模提升技术涉及椭圆曲线上阿贝尔群结构中有限阶点的伽罗瓦对称性。基于巴瑞·马资尔 (Barry Mazur) 对此伽罗瓦表示的变形理论，怀尔斯确定一个数值标准，确保阶点 p 的模性质提升到阶点的任何 p 次幂的模性质，其中 p 是一个奇素数。然后，此提升的模性质足以证明椭圆曲线是模的。该数值标准在半稳定情况下通过使用与理查德·泰勒 (Richard Taylor) 共同撰写的重要配套论文所确认。罗伯特·朗兰兹 (Robert Langlands) 和杰罗德·滕内尔 (Jerrold Tunnell) 的定理表明，在许多情况下，由阶点 3 给出的伽罗瓦表示具有模性质。通过将一个素数巧妙地转换到另一个素数，怀尔斯论证，在其余情况下，由阶点 5 给出的伽罗瓦表示具有模性质。这样就完成了他的模性质猜想的证明，因此也证明了费马大定理。

由怀尔斯引入的新思路对于许多后续发展极其重要，包括克利斯朵夫・布勒尔 (Christophe Breuil)、布莱恩・康拉德 (Brian Conrad)、弗雷德・戴蒙德 (Fred Diamond) 和理查德・泰勒 (Richard Taylor) 在 2001 年对该模性质猜想的一般情况证明。就在刚刚过去的 2015 年，努诺・弗雷塔斯 (Nuno Freitas)、保维勒鸿 (Bao V. Le Hung)和萨米尔・思科谢科 (Samir Siksek) 证明了实二次数域的类似模性质断言。对费马大定理的证明，包含一段丰富的数学史，且颇具戏剧性，很少有其他的成就能与之相提并论。