THE
ABEL
PRIZE
2016

ノルウェー科学文学アカデミーは 2016 年のアーベル賞を、オックスフォード大学の**サー・アンドリュー・J・ワイルズ（Sir Andrew J. Wiles）**に、**数論に新時代を開いた、半安定楕円曲線のモジュラー性予想の方法による素晴らしいフェルマーの最終定理の証明に対して**授与することを決定した。

古く歴史を遡る美しい数学の一分野、数論は、整数の算術的特性を扱う。近代的形式においては、その課題は根本的に、複素解析、代数幾何学、表現論に繋がっている。数論の成果は、通信、金融取引、デジタルセキュリティのための暗号化アルゴリズムを通じて、日常生活に重要な役割を果たしている。

17 世紀にピエール・ド・フェルマーが最初に定式化したフェルマーの最終定理は、$n>2$ の正の整数の場合に $x^n + y^n = z^n$ という方程式の解が存在しないという定理である。フェルマーは $n=4$ の場合を証明した。レオンハルト・オイラーが $n=3$ の場合を証明し、ソフィー・ジェルマンが初めて、無限個の素数指数に適用可能な一般的な結果を証明した。この問題に関するエルンスト・クンマーの研究は、理想数や一意分解性の微妙さなど、代数的数論におけるいくつかの基本的な概念を明らかにした。アンドリュー・ワイルズによる完全な証明は、更に楕円曲線、モジュラー形式、ガロア表現という数論における三つの概念に依拠している。

楕円曲線は二変数の三次方程式で定義される。これらはニルス・ヘンリック・アーベルが導入した楕円関数の自然な定義域である。モジュラー形式は、上半複素平面で定義された高い対称性を持つ解析関数であり、自然にモジュラー曲線として知られる図形上の関数となる。楕円曲線は、モジュラー曲線の一つからの写像によってパラメータ付けできるならばモジュラーだと言われる。志村五郎と谷山豊、アンドレ・ヴェイユによって１９５０年代および６０年代に提出されたモジュラー性予想は、有理数上で定義されるすべての楕円曲線はモジュラーだと主張している。

1984 年、ゲルハルト・フライは半安定楕円曲線をフェルマーの最終定理の任意の仮説的反例に対応させ、この楕円曲線がモジュラーではないという強い疑いを提示した。フライの非モジュラー性は、ジャン・ピエール・セールのイプシロン予想を経て、1986 年にケネス・リベットによって証明された。こうして志村・谷山・ヴェイユの半安定楕円曲線のモジュラー性予想の証明は、フェルマーの最終定理の証明を生み出すことにもつながろうとしていた。しかし当時モジュラー性予想は全く近づきがたいと広く信じられていた。それ故、アンドリュー・ワイルズが 1995 年に出版した画期的な論文でモジュラー性リフティングの技法を導入し、モジュラー性予想の半安定ケースを証明したのは、驚くべき前進だったのである。

ワイルズのモジュラー性リフティングの技法は、楕円曲線のアーベル群構造に関する有限位数の点のガロア対称性に関わっている。このようなガロア表現についてのバリー・メイザーの変形理論に立脚し、ワイルズは、ｐが奇素数である場合に、位数ｐの点のモジュラー性があらゆるｐの冪乗の位数の点にリフト可能であることを保証する数値的判定条件を発見した。このリフトされたモジュラー性は楕円曲線がモジュラーであることを証明するのに充分である。この数値的判定条件は、リチャード・テイラーとの共著による重要な補足論文によって、半安定ケースにおいて確証された。ロバート・ラングランズとジェロルド・タネルの定理は、多くの場合位数３の点によって与えられたガロア表現がモジュラーであることを示している。一つの素数からもう一つの素数への独創的な転換により、ワイルズは残りのケースにおいて位数５の点によって与えられたガロア表現がモジュラーであることを示した。これによって彼のモジュ

ラー性予想の証明は完結し、フェルマーの最終定理の証明も完結したのである。

ワイルズが導入した新しい考えは、2001 年のクリストフ・ブレイユ、ブライアン・コンラッド、フレッド・ダイアモンド、リチャード・テイラーによるモジュラー性予想の一般的なケースの証明を含む後続の研究の進展にとって決定的な役割を果たした。つい最近、2015 年にはヌーノ・フレイタス、バオ・V・ル・フン、サミール・シクセクが実二次体についてのモジュラー性の類似の命題を証明した。フェルマーの最終定理ほど豊かな歴史とドラマチックな証明をもつ結果は稀である。