THE ABEL PRIZE 2020

挪威科学与文学院决定将 2020 年的阿贝尔奖授予

来自以色列,耶路撒冷希伯来大学的**希勒尔·弗斯滕伯格** (Hillel Furstenberg)

来自美国康涅狄格州，纽黑文市，耶鲁大学的**格雷戈里·马古利斯** (Gregory Margulis)

“表彰其率先提出在群论、数论和组合数学中使用概率论和动力系统的方法”

概率论的一个中心分支是对随机游走的研究，例如，一位探索未知城市路线的旅行者，通过扔硬币来决定在每个十字路口向左转还是向右转。Hillel Furstenberg 和 Gregory Margulis 发明了类似的随机游走方法，用于研究线性群的结构，例如，线性群是在乘积与求逆运算下封闭的矩阵集合。通过随机选择矩阵的乘积，人们试图描述结果是如何增长的，以及这种增长对群结构的意义。

Furstenberg 和 Margulis 提出了富有远见且强有力的概念，解决了棘手的问题，并发现了群论、概率论、数论、组合数学和图论之间令人惊讶且富有成果的联系。他们的工作创立了一种思想流派，该流派对数学及其应用的许多领域产生了深远的影响。

1963 年，Hillel Furstenberg 从研究矩阵的随机乘积出发，提出了一个至关重要的概念，并对其进行了分类，现在称为 Furstenberg 边界。他利用这一概念，给出了一个 Poisson 型公式，以其边界值表示一般群上的调和函数。在上世纪 60 年代初与 Harry Kesten 合作进行的关于随机游走的研究中，他还获得了一个关于最大李雅普诺夫指数的正定性的重要标准。

1967 年，Furstenberg 受到丢番图逼近的启发，提出了遍历系统不相交的概念，该概念类似于整数的互素。事实证明，这一自然概念极其深入，可应用于广泛的领域，包括电气工程中的信号处理和滤波问题、分形集的几何结构、齐次流和数论。他的“×2 ×3 猜想”是一个非常简单的例子，它带来了许多进一步的发展。他考虑了在复单位圆上取平方和立方的两个映射，证明了这两个映射下唯一不变的闭集是有限的或整个圆。他的猜想指出，唯一的不变测度是有限的或旋转不变的。尽管许多数学家做了很多努力，但这个测度分类问题仍然未解决。对按群表示不变测度的分类已经发展成为一个广泛的研究领域，该领域对量子算法的遍历性、平移曲面、Margulis 对 Littlewood 猜想的看法以及 Marina Ratner 的惊人研究成果均产生影响。考虑到几何对象中的不变测度，Furstenberg 于 1972 年证明了双曲型曲面极限圆流的唯一遍历性，该证明衍生出许多结果。

1977 年，Furstenberg 借助遍历理论和他的多重回归定理，对 Szemeredi 关于在正密度整数子集中存在长的算术级数的定理给出了令人震惊的新证明。在随后与 Yitzhak Kaztnelson、Benjamin Weiss 等人的

合作中，他发现了 Szemerédi 定理更高维的和深远的推广，以及拓扑动力系统和遍历理论在 Ramsey 理论和加性组合学中的其他应用。这项工作影响了许多后来的发展，包括 Ben Green、Terence Tao 和 Tamar Ziegler 关于 Hardy-Littlewood 猜想和素数算术级数的工作。

Gregory Margulis 彻底改变了对半单群格的研究。群中的格是一个离散的子群，其商群的体积是有限的。20 世纪 70 年代中期，Margulis 在其"超刚性"和"算术性"定理中将半单群的这些格进行了分类。Armand Borel 和 Harish-Chandra 使用算术结构在半单群中构造了格，本质上将其作为大矩阵群中的取整数值的矩阵群。正如 Atle Selberg 猜想的那样，Margulis 证明了所有秩大于或等于 2 的格都是由这种算术结构产生的。1978 年，Margulis 在他的"正规子群定理"中揭示了这些格的结构。他的技术的核心是对概率论方法（随机游走、Oseledets 定理、顺从性、Furstenberg 边界）以及 Kazhdan (T) 性质的惊人应用。

Margulis 在其 1970 年的论文中，构造了严格负变曲率的紧黎曼流形的所谓"Bowen-Margulis 测度"。他利用测地流关于该测度的混合特性，证明了素数定理的一个类比，即小于给定长度的封闭测地线数量的渐近公式。在此之前，唯一这样的计数结果是通过 Selberg 迹公式得出的，该公式仅适用于局部对称空间。从那时起，大量计数和均匀分布问题均使用 Margulis 的混合方法进行研究。

其方法的另一个引人注目的应用是 1984 年在数论中证明了几十年前的 Oppenheim 猜想：3个变量或 3个变量以上的非退化二次型要么是有理二次型的倍数，要么在整点取值是稠密的。

1973 年，Margulis 在图论中创造性地利用 Kazhdan (T)性质构建了第一个已知的显式扩展图族。扩展图是具有高连通性的图。Mark Pinsker 提出的这个概念来自对通信系统网络的研究。扩展图现在是计算机科学和误差校正码中使用的基本工具。1988 年，Margulis 构造了最佳扩展图，即现在所知的 Ramanujan 图，它是由 Alex Lubotzky、Peter Sarnak 和 Ralph Phillips 独立发现的。

Furstenberg 和 Margulis 的影响远远超出了他们的研究成果和原始领域。从 Lie 理论、离散群和随机矩阵到计算机科学和图论，他们被广大的数学家们视为先驱。他们已经证明了概率论方法的普遍性，以及有效地跨越不同数学学科之间的边界，例如使纯数学与应用数学之间的传统二分法变模糊了。