Abels addisjonsteorem

Karl Egil Aubert
Matematisk institutt
Blindern, Oslo 3, Norge

1. Innledning

Abels addisjonsteorem er et grunnleggende resultat med mange ansikter. Det kan betraktes som et resultat om algebraiske funksjoner og deres integraler, som et teorem om Riemannske flater eller også som et teorem om algebraiske kurver.

Den klassiske formuleringen – »addisjonsteoremet« – tar sitt utgangspunkt i et rikt eksempelmateriale av velkjente identiteter mellom summer av (»bestemte«) integraler av algebraiske funksjoner. I de enkleste tilfellene dreier det seg om integraler hvor de omvendte funksjonene f.eks. kan være eksponensialfunksjonen eller trigonometriske funksjoner. Addisjonsteoremet er da bare en annen måte å uttrykke velkjente identiteter (funksjonallikninger) som gjelder for disse funksjonene. I de mer moderne og »glatte« formuleringer av Abels teorem er det opprinnelige aspektet som et »addisjonsteorem« bare implisitt tilstede, kamuflert bak begreper som kompakt Riemannsk flate, divisor, Picard-gruppe og Jacobi-mangfoldighet. I en av disse moderne formuleringene vil Abels teorem bare uttrykke at en bestemt gruppe-homomorfi er injektiv, mens en annen formulering vil gi Abels teorem som en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at en gitt divisor på en kompakt Riemannsk flate er en hoveddivisor (d.v.s. kommer fra en meromorf funksjon på flaten).

I våre dager føler vi at det er nødvendig å avklare en rekke grunnleggende begreper før vi går løs på en rigorøs behandling av Abels teorem. I så måte var Abel langt forut for sin tid. Vi må nemlig huske at han ikke eksplisitt brukte slike fundamentale begreper som kompleks integrasjon, analytisk fortsettelse eller Riemannsk flate. Men han har tydeligvis vært ledet av en meget sikker intuisjon på disse områder. Også det grunnleggende begrepet *slekt* (genus) som inngår i Abels teorem, var uavklaret på Abels tid og han fremstår også her som en pionér. Når det gjelder selve den komplekse integrasjonen, er det meget sannsynlig at Abel under sitt ophold i Paris stiftet bekjentskap med Cauchy's grunnleggende arbeide om dette fra 1825, men Abel gjør ikke eksplisitt bruk av dette.

2. Elementære eksempler

Spesialtilfeller av Abels addisjonsteorem finnes allerede i de helt grunnleggende deler av differensial- og integralregningen. Her ytrer dette teoremet seg som velkjente funksjonallikninger for elementære funksjoner som logaritmen og de (omvendte) trigonometriske funksjoner. I infinitesimalregningen behandles disse identitetene i reell form mens Abels teorem egentlig angår de utvidede komplekse versjonene av dem.

Det mest banale «addisjonsteorem« har vi i likningen

$$\int_0^{x_1} dt + \int_0^{x_2} dt = \int_0^{x_1+x_2} dt \tag{1}$$

som også er gyldig for kompleks integrasjon. Om vi skriver $\Psi(x)=\int_0^x dt$ blir $\Psi(x) = x$ og vi kan derfor si at (1) er addisjonsteoremet for identitetsfunksjonen.

I stedet for først å innføre eksponensialfunksjonen og så definere logaritmen som den omvendte funksjon, er det idag mange lærebøker som tar sitt utgangspunkt i funksjonallikningen

$$f(x)+f(y) = f(xy) \tag{2}$$

som den sentrale egenskap for logaritmen. De viser da (se f.eks. [4] s. 227) at *om* det eksisterer en deriverbar løsning $\neq 0$ av (2) så er den gitt ved

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{for } x>0 \tag{3}$$

At (3) virkelig tilfredsstiller (2) for $x>0$ følger ved enkel integralregning. Vi har altså

$$\int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1 x_2} \frac{dt}{t}. \tag{4}$$

For kompleks integrasjon, som i dette tilfellet avhenger av integrasjonsveien, blir (4) bare en identitet modulo et helt multiplum av $2\pi i$. (Vi forutsetter at $x_1 x_2 \neq 0$). Ved gjentakelser av (4) får vi den mer generelle likningen

$$\int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} + \ldots + \int_1^{x_n} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1 x_2 \ldots x_n} \frac{dt}{t} \tag{5}$$

slik at en vilkårlig endelig sum av integraler av type (3) kan reduseres til *ett* integral av samme type, bare de øvre grenser i integralene tilfredsstiller den relasjonen som er angitt. Vi skal se at dette er en sentral egenskap ved det generelle Abelske teorem selv om vi vanligvis ikke kan klare oss med bare ett integral på høyre side.

I »addisjonsteoremene« (1) og (4) er integranden en *rasjonal* funksjon. Et annet eksempel av samme enkle type har vi i identiteten

$$\text{(6)} \qquad \int_0^{x_1} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{x_3} \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{med} \quad x_3 = \frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$$

som ikke er noe annet enn den velkjente funksjonallikningen for $\arctan x$. Også her må denne likheten i det komplekse tilfellet taes med reservasjonen »modulo perioder«. En *periode* betyr verdien av samme type integral, men med *lukket* integrasjonsvei. Alle integrasjonsveier legges utenom polene som her er $\pm i$.

Endelig nevner vi et elementært eksempel hvor integranden *ikke* er en rasjonal funksjon, nemlig addisjonsteoremet

$$\text{(7)} \qquad \int_0^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{x_3} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\text{med} \quad x_3 = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$$

som ved »omvending« ikke er noe annet enn en omskrivning av den velkjente identiteten $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$.

3. Elliptiske integraler.

I alle eksemplene ovenfor er integralene av de gitte algebraiske funksjoner kjente elementære funksjoner som $\ln x$, $\arctan x$ og $\arcsin x$, og identitene mellom integralene er kjente funksjonallikninger for disse funksjoner. Vi kunne altså i disse tilfellene holdt integralregningen helt og holdent utenfor om det ikke var for å gi noen helt elementære illustrasjoner av Abels teorem.

Allerede tidlig i integralregningens historie støtte man på enkle kontinuerlige funksjoner som man ikke kunne integrere (antiderivere) ved hjelp av de vanlige elementære funksjoner. De elliptiske integraler danner det historisk viktigste eksempel på en slik situasjon. Ved passende variabelbytte kan disse integralene overføres til tre normalformer. Den første og mest benyttede normalform på Abels tid var den såkalte *Legendreske normalform*

$$\text{(8)} \qquad \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

mens en i våre dager baserer seg på en eneste normalform, nemlig den *Weierstrasske*

$$\text{(9)} \qquad u = \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$$

som ved omvending, d.v.s. ved å betrakte x som en funksjon av u leder til den elliptiske funksjon som kalles *Weierstrass' $\wp$-funksjon.*

Man ble tidlig ledet til elliptiske integraler i forbindelse med diverse anvendelser av integralregning i geometri og mekanikk, som ved beregning av buelengde på en ellipse (derav navnet), svingetid ved pendelbevegelse og senere i forbindelse med konform avbildning. En realiserer den konforme ekvivalens mellom det øvre halvplan og det indre av et rektangel ved hjelp av et elliptisk integral. Denne sistnevnte anvendelsen av elliptiske integraler er spesielt informativ fordi det gitte rektangel står i direkte forbindelse med dobbeltperiodisiteten for den omvendte elliptiske funksjon (se [3] s. 230-232, kap. 7 i [3] gir forøvrig en utmerket introduksjon til elliptiske funksjoner).

Selv om en på Abels tid ikke hadde greid å uttrykke integraler av typen (8) eller (9) ved elementære funksjoner, var en den gang ikke klar over at dette er prinsipielt umulig. Dette ble først vist av Liouville i 1837.

Teorien for elliptiske funksjoner har en lang forhistorie i teorien for elliptiske integraler. I 1718 gjorde den italienske greve Fagnano en bemerkelsesverdig oppdagelse i forbindelse med lemniskatens buelengde. Lemniskaten er en plan kurve som i sin enkleste form ser ut som et liggende åttetall

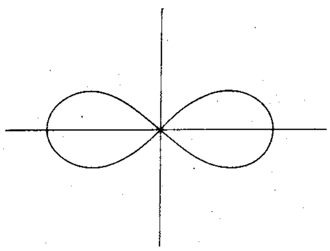

Fig. 1.

med likningen $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ i vanlige rettvinklede koordinater. Buelengden for denne lemniskaten regnet fra origo til et punkt i første kvadrant med radiusvektor r $(0 \leqq r \leqq 1)$ er gitt ved det elliptiske integralet

$$s(r) = \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Ved to suksessive variabelbytter

$$r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4} \quad \text{og} \quad t^2 = \frac{2u^2}{1-u^4}$$

får vi addisjonsteoremet (eller snarere »duplikasjonsteoremet«)

$$\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{10}$$

hvor r og u er forbundet ved

$$r^2 = \frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}\,.$$

En kan si at formelen (10) for lemniskaten er motstykket til formelen $\sin 2u = 2\sin u \cos u$ for sirkelen, eller om man vil formelen (7) med $x_1 = x_2$.

Euler fortsatte Fagnano's undersøkelser og fant i 1753 at addisjonsteoremet for lemniskateintegralet har formen

$$\int_0^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{x_3} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \tag{11}$$

hvor

$$x_3 = \frac{x_1\sqrt{1-x_2^4} + x_2\sqrt{1-x_1^4}}{1+x_1^2x_2^2}$$

Den tilsvarende relasjonen mellom x_1, x_2 og x_3 i det mer generelle addisjonsteoremet for Legendre's elliptiske integral (8) er

$$x_3 = \frac{x_1\sqrt{(1-x_2^2)(1-k^2x_2^2)} + x_2\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}{1-k^2x_1^2x_2^2} \tag{12}$$

Vi får (11) som spesialtilfelle av (12) ved å sette $k=i$ og (12) generaliserer også (7) ved å sette $k=0$.

4. Det generelle addisjonsteoremet

Hva er det så som er den felles kjerne i de eksemplene vi har gitt? Vil den vanlige leser på dette grunnlag kunne gjette seg til hva et eventuelt generelt addisjonsteorem sier? Neppe. Det eksempelmateriale vi har gitt, er nemlig meget spinkelt i forhold til den generalitet som Abels addisjonsteorem har. Etter de eksemplene vi har gitt, skulle en kanskje tro at summene av integraler av algebraiske uttrykk av liknende type som de vi har betraktet – alltid kan reduseres til *ett* integral av samme form. Dette er galt. I denne henseende er nemlig våre eksempler en smule villedende siden de alle angår tilfeller hvor slekten er 0 eller 1. Dette var selvfølgelig Abel klar over. I et brev til Crelle fra Paris i august 1826 (se [2] s. 267) gir han et eksempel på et addisjonsteorem hvor det inngår en kvadratrot av et polynom av 6^{te} grad – et såkalt hyperelliptisk integral av slekt 2. I dette tilfellet angir Abel helt eksplisitt hvorledes en sum av tre integraler kan tilbakeføres til en sum av *to* integraler av samme type.

På dette punkt kreves det egentlig en nærmere presisering av begrepet *algebraisk funksjon* og kompleks integrasjon av slike funksjoner (eller differensialuttrykk). Selv om Abel ikke formaliserte disse begrepene slik vi gjør det idag, er det klart at han hadde en presis og sikker intuisjon om dette. Et irredusibelt polynom i to variable, med komplekse koeffisienter og av grad n med hensyn på y, vil ved likningen $f(x,y)=0$ implisitt definere y som en algebraisk funksjon av x dersom vi tar de nødvendige forholdsregler med hensyn til den flertydigheten som oppstår. Innenfor en liten sirkelskive har vi normalt n holomorfe funksjoner $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, slik at $f(x, y_i(x)) = 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ når x ligger i denne sirkelskiven. Når vi integrerer en algebraisk funksjon langs en kurve γ, er forutsetningen at vi gjør et utvalg av lokale løsninger som varierer på en kontinuerlig måte langs γ. Det samme skal være tilfelle når vi mer generelt betrakter såkalte *Abelske integraler*, det vil si integraler av typen

$$\int_a^x \varphi(x,y)\,dx \tag{13}$$

hvor y er en algebraisk funksjon av x mens φ er et rasjonelt uttrykk i x og y. Endelige summer av Abelske integraler av typen

$$\sum_{i=1}^{p} \int_a^{x_i} \varphi(x,y)\,dx$$

skal vi, som i [5], kort kalle for *Abelske summer*. Disse Abelske summene kan også oppfattes som summer av formen $\sum_{i=1}^{p} F(x_i)$ hvor F er en funksjon som har φ som derivert.

Abels addisjonsteorem. Hvis F er en funksjon som har en gitt algebraisk funksjon φ som derivert ($dF = \varphi(x,y)\,dx$) så finnes det et helt tall g som bare avhenger av φ slik at vilkårlige Abelske summer $\sum_{i=1}^{p} F(x_i)$ alltid kan skrives som en sum av formen $\sum_{j=p+1}^{p+g} F(x_j) + Q$ hvor x_j'ene $(j=p+1,\ldots,p+g)$ er algebraiske uttrykk i x_i-ene $(i=1,2,\ldots,p)$ og Q er en sum som består av rasjonale funksjoner og logaritmer til slike.

Mer enn mange andre resultater om algebraiske funksjoner er Abels teorem en *analytisk* setning. Likevel er Abels bevis for addisjonsteoremet preget av hans bakgrunn i likningsteori. En hovedsak i beviset er nemlig setningen om at en symmetrisk rasjonal funksjon av røttene i en algebraisk likning kan skrives som en rasjonal funksjon av likningens koeffisienter.

Addisjonsteoremet uttrykker at vilkårlige Abelske summer knyttet til den algebraiske funksjonen φ (som i sin tur avhenger av den algebraiske funksjonen $y(x)$) kan reduseres til Abelske summer med høyst g ledd (pluss et integral av en rasjonal funksjon, svarende til Q ovenfor). Vi kan derfor underforstå at vi har valgt g *minimal* med hensyn på denne reduksjonsegenskapen (d.v.s. at vi ikke alltid kan redusere en Abelsk sum med g ledd til en tilsvarende sum med færre ledd).

5. Algebraiske kurver med singulariteter

Likningen $f(x,y)=0$ hvor f er et irredusibelt polynom i to variable med komplekse koeffisienter leder til begrepene algebraisk funksjon, (kompakt) Riemannsk flate og (plan) algebraisk kurve. Et stykke på vei er disse tre begrepene ekvivalente. Likevel må en si at det er kurvesynspunktet som presenterer det rikeste og mest fullstendige bilde av likningen $f(x,y)=0$. For dette synspunktet tar hensyn til den meget detaljerte informasjon som ligger i kurvens singulariteter (multiple punkter). Vi får en viss visualisering av de forskjellige typer av singulariteter når vi i et plan inntegner de punktene på kurven $\mathscr{K}=\{(a,b)\,|\,f(a,b)=c\}$ hvor begge koordinatene a og b er reelle. F.eks.

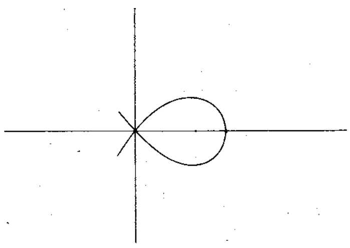

Fig. 2.

(a) $x^3-x^2+y^2=0$. Ordinært dobbeltpunkt i origo med tangentene $x+y=0$ og $x-y=0$.

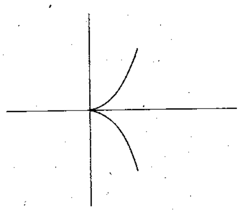

Fig. 3.

(b) $x^3-y^2=0$. Ikke-ordinært dobbeltpunkt (spiss) i origo og med $y=0$ som dobbelttangent.

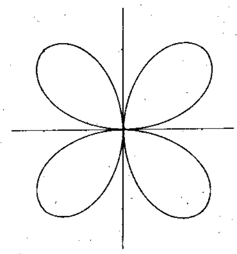

Fig. 4.

(c) $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$. Ikke-ordinært firedobbeltpunkt i origo. Hver av koordinataksene er en dobbelttangent.

Selv om disse visualiseringene er ufullstendige (idet de bare representerer den reelle delen av kurven), har de en betydelig heuristisk verdi. Ut fra dette anskuelige eksempelmateriale er man blitt ledet til en presis klassifikasjon av alle typer av singulariteter. En kan si at singularitetene gir et bilde av hvorledes kurven snitter seg selv.

Om vi kompletterer kurven $\mathscr{K}$ til en projektiv kurve $\bar{\mathscr{K}}$, har vi følgende forbindelse mellom kurvens slekt g, dens grad n og multiplisitetene r_i i dens singulære punkter (d.v.s. de punkter hvor vi har $r_i \geqq 2$)

$$g=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum_i \frac{r_i(r_i-1)}{2}. \tag{14}$$

Summen til høyre i (14) må tolkes på en bestemt måte om den også skal være gyldig for ikke-ordinære singulariteter hvor vi har færre tangenter enn multiplisiteten tilsier. (Bidraget til denne summen fra en singularitet av typen (*c*) vil f.eks. bli 8 istedet for 6 på grunn av de to dobbelttangentene.) Størrelsen $\pi = (n-1)(n-2)/2$ kalles ofte for kurvens *virtuelle slekt*. Vi har $\pi \geqq g$ med likhet hvis og bare hvis kurven er uten singulariteter.

Et annet sentralt tema i teorien for algebraiske kurver er spørsmålet om hvorledes en gitt kurve blir snittet av *andre* plane algebraiske kurver. I virkeligheten er det dette synspunktet som ligger til grunn for Abels egen behandling av addisjonsteoremet. Abels versjon inkluderer også de tilfeller hvor den gitte kurve har singulariteter, noe som vanligvis går tapt i de moderne fremstillingene av Abels teorem på Riemannske flater.

For det Abel gjør for å oppnå forbindelsen mellom x_i-ene og x_j-ene i addisjonsteoremet ovenfor er følgende: I tillegg til den faste kurven $f(x,y)=0$ betrakter han en kurveskare $h(x,y,a_1,a_2,\ldots,a_r)=0$ hvor parametrene $a_1,a_2,\ldots,a_n$ inngår i polynomet h på en lineær måte. På grunn av at vi har r parametre å rutte med, kan vi fritt velge r punkter på $\mathscr{K}$ og tilpasse $a_1,\ldots,a_r$ slik at h skjærer $\mathscr{K}$ i disse punktene med absisser $x_1,x_2,\ldots,x_r$. Størrelsene x_j $(j=p+1,\ldots,p+g)$ i addisjonsteoremet blir da bestemt som absissene for de resterende (»endelige«) skjæringspunktene mellom h og f. En måte å produsere spesielle addisjonsteoremer på er å velge h av grad m og fastlegge $mn-\pi$ skjæringspunkter med kurven $\mathscr{K}$ slik at vi etter Bezout's teorem får π resterende skjæringspunkter.

Vi kan f.eks. anvende denne geometriske metoden på irredusible kubiske kurver. Da er $f(x,y)$ et irredusibelt tredjegradspolynom i x og y som vi »homogeniserer« med en tredje variabel z for å kunne betrakte den tilhørende plane projektive kurve $\bar{\mathscr{K}}$. Som $h(x,y,a_1,\ldots,a_r)=0$ velger vi den »variable« linjen $y-a_1x-a_2=0$, altså $r=2$. Vi kan legge denne linjen gjennom to punkter på $\mathscr{K}$ og dermed få et entydig bestemt resterende skjæringspunkt med $\bar{\mathscr{K}}$. Det åpenbarer seg nå en fantastisk forbindelse mellom geometriske, analytiske og algebraiske egenskaper. Noen av disse er summert opp i det følgende skjema.

Vi ser allerede av dette eksemplet at synspunktet »Riemannske flater« ikke makter å skille mellom et ordinært dobbeltpunkt og en spiss. Derimot gir Abels opprinnelige addisjonsteorem en fullstendig klassifikasjon av (irredusible) kubiske kurver. Addisjonsteoremet fører til at de ikke-singulære punktene på en irredusibel kubisk kurve kan organiseres til en gruppe på en naturlig måte. De gruppene vi får i de tre tilfellene er: C/Λ = kvotientgruppen av den additive gruppe C av de komplekse tall med hensyn på den undergruppen av C som genereres av to komplekse tall ω_1 og ω_2, som er lineært uavhengige over kroppen av de reelle tall, C^* = den multiplikative gruppen av alle komplekse tall $\neq 0$ – og den additive gruppen C.

Straks vi går til kurver av høyere grad hvor $g \geqq 2$, blir bildet meget mer komplisert. Men nettopp her er addisjonsteoremet et viktig instrument i den videre teori.

Irredusible kubiske plane kurver ($n=3$)	Normalform	π	g	Antall inflek-sjons-punkter	Addi-sjons-teorem	Riemann-flate	Gruppe
Uten singu-lariteter	$y^2 = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ hvor x_i-ene er parvis forskjellige	1	1	9	Ellip-tiske funksjo-ner ($\wp$-funk-sjonen)	Torus-flate	$\mathbb{C}/\Lambda$
Et ordinært dobbelt-punkt	$y^2 = ax^2(x+1)$	1	0	3	Logarit-men (se(4))	Kule-flate	$\mathbb{C}^*$
En spiss	$y^2 = ax^3$	1	0	1	Identi-tets-funk-sjonen (se(1))	Kule-flate	$\mathbb{C}$

Få teoremer i matematikkens historie er blitt så mange superlativer til del som addisjonsteoremet. Men i stedet for å gjenta hva Legendre, Jacobi, Picard, Mittag-Leffler og andre har sagt om dette i tidligere tider, er det kanskje av vel så stor interesse å høre hva Griffiths sier i 1976 ([5] s. 322).

»..... Confronted with this state of affairs it seemed a good idea to go back and have a look into just how our understanding of the beautiful codimension one theory came about. Here, almost certainly the decisive step was Abel's theorem. This claim is by no means intended to minimize the later works of Jacobi, Riemann etc., but rather to maintain that it was Abel's theorem which initially got the ball rolling. His general addition theorem provided the key to unlocking the structure of an algebraic curve via its Jacobian.«

Denne artikkelen kan bare i liten grad rettferdiggjøre eller begrunne det Griffiths her sier. Betydningen av Abels teorem ligger først og fremst på et videregående og teoretisk plan og kan vanskelig forklares tilstrekkelig innenfor en kort artikkel som denne. Det man kan håpe på er at de antydninger som er gitt, vil inspirere noen til et nøyere studium av Abels teorem.

Litteratur

Det går ingen snarvei til en god og allsidig forståelse av Abels addisjonsteorem. En slik forståelse forutsetter et relativt grundig studium av både kompleks funksjonsteori og algebraiske kurver. Blant de mange bøker som behandler disse to emnene, nevnes her bare [7] og [8] som generelle referanser. For geometriske anvendelser av addisjonsteoremet (f.eks. Poncelets teorem) henvises til [5] og [6].

[1] N. H. Abel: *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*, *Oeuvres Complètes.* Vol. I, s. 145-211.
[2] N. H. Abel: *Oeuvres Complètes.* Vol. II.
[3] L. V. Ahlfors: *Complex Analysis* (*second edition*). McGraw-Hill Book Company 1966.
[4] T. M. Apostol: *Calculus Vol.* 1 (*second edition*). Blaisdell Publ. Comp. 1967.
[5] P. A. Griffiths: *Variations on a Theorem of Abel.* Inventiones Math. 35 (1976), s. 321-390.
[6] P. A. Griffiths: *Complex Analysis and Algebraic Geometry.* Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), Vol. 1 (1979), s. 595-626.
[7] I. R. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry.* Springer-Verlag 1977.
[8] C. L. Siegel: *Topics in Complex Function Theory I-III.* Wiley 1969-1973.