THE ABEL PRIZE 2015

挪威科学与文学院决定将 2015 年的阿贝尔奖授予普林西顿大学的约翰•福布斯•纳什（John F. Nash, Jr.）和纽约大学库朗研究院的路易斯•尼伦伯格（Louis Nirenberg），

以表彰他们在非线性偏微分方程理论以及该理论在几何分析应用方面所作出的卓越的开创性贡献。

偏微分方程用于描述物理、化学、生物以及其他科学现象中的基本规律。偏微分方程还有助于分析几何对象，过去几十年取得的无数成功已经证明了这一点。

约翰·纳什和路易斯·尼伦伯格在该理论的发展中发挥了主导作用，解决了基本问题，并提出了深刻的理念。他们取得的突破已发展成为强大的通用方法，这些方法已成为研究非线性偏微分方程必不可少的工具。该理论的各个分支都能感受到他们的影响，从基本的存在性结果到解的定性研究，无论是光滑还是非光滑方程。他们的研究结果对于偏微分方程的数值分析也具有意义。

等距嵌入定理表示一个内蕴几何作为子流形嵌入欧几里得空间的可能性，已经促成了其中的一些发展。纳什嵌入定理是二十世纪几何分析中最具原创性的成果之一。通过证明黎曼几何可以作为光滑子流形嵌入欧几里得空间，纳什光滑（C^{∞}）嵌入定理确立了黎曼内在观点与较早的外在方法的等

价性。纳什非光滑（C^1）嵌入定理由科伊伯（Kuiper）改进，表示实现起初似乎被几何不变量如高斯曲率所阻止的嵌入的可能性；该定理是格罗莫夫（Gromov）整个凸积分理论的核心，同时还激发了近期不可压缩流体正则性认识有关的令人惊叹的进展。尼伦伯格利用自己证明的基础嵌入定理, 即可以实现球面 S^2 到 R^3 在给定高斯曲率或黎曼度量下的嵌入，解决了闵可夫斯基（Minkowski）和外尔（Weyl）提出的经典问题[波戈里洛夫（Pogorelov）也同时解决了外尔提出的经典问题]。解决这些问题具有重要的意义，一方面是因为这些问题代表了一个发展中的领域，另一方面是因为所创建的方法是正确的, 并得到了进一步的应用。

纳什关于流形作为真代数簇方面的研究成果以及牛朗特-尼伦伯格（Newlander-Nirenberg）复流形结构定理进一步说明了两位获奖者对几何领域的影响。

正则性问题是偏微分方程研究领域一个广泛关注的问题，有时是为了严格证明，有时是为了提供解答有关的宝贵的定性见解。在未对系数作出任何正则性假设的情况下，纳什平行于德吉奥吉（De Giorgi）首次证明了一般维数的线性椭圆型方程组的解的赫尔德（Hölder）估计，这是该领域取得的一个突破；除其他影响外，这一突破还解决了希尔伯特（Hilbert）提出的第 19 个问题，即关于解析椭圆积分泛函极小元解析性的问题。在纳什证明几年后，尼伦伯格、阿格蒙（Agmon）和道格里斯（Douglis）提出了与椭圆型方程组的解有关的一些创新的正则性估计和 L^p 参数，拓展了经典的绍德尔（Schauder）理论，对于给定参数具有可积条件的情形非常有用。这些研究成果创立了现代正则性理论，该理论自创立后得到了极大的发展，应用在分析、几何和概率领域，甚至是非常粗糙的非光滑的情形。

对称特性还提供了与非线性微分方程组的解有关的基本信息，有利于定性研究以及数值计算简化。这一领域最令人瞩目的成果之一是由尼伦伯格与 Gidas 和 Ni 共同取得的：他

们发现，一大类非线性椭圆型方程组的每个正解将表现出与方程本身相同的对称性。

非但没有局限于解决这些问题，纳什和尼伦伯格证明的结果已成为非常有用的工具，并且具有巨大的应用前景。其中最为流行的工具是由尼伦伯格发展而来的插值不等式，包括加利亚尔多-尼伦伯格（Gagliardo-Nirenberg）不等式和约翰-尼伦伯格（John-Nirenberg）不等式。约翰-尼伦伯格不等式控制了有界平均振动函数偏离其平均值的程度，并表述了 BMO 空间与哈代（Hardy）空间 H^1 出人意料的对偶性。纳什-德吉奥吉-莫泽（Nash-De Giorgi-Moser）正则性理论和纳什不等式[最早由斯泰恩（Stein）证明]已成为各种空间上概率半群研究的关键工具, 这些空间包括了欧几里得空间,平滑流形和度量空间等。纳什-莫泽（Nash-Moser）反函数定理是一种有效的方法来求解各种微扰非线性偏微分方程。虽然这里无法完全涵盖纳什和尼伦伯格对非线性偏微分方程现代工具箱的广泛影响，但必须提及的是科恩（Kohn）-尼伦伯格伪微分算子理论。

除了个体作为偏微分方程分析领域杰出的人物外，纳什和尼伦伯格通过他们的贡献和合作相互影响。在今天比以往任何时候都能更加强烈地感受到 20 世纪 50 年代他们在库朗数学研究所发起的富有成果的对话的影响。

し、ハーディー空間 H^1 と BMO 空間の予想外の双対性を表現する。ナッシュ＝デ・ジョルジ＝モーザーの正則性理論と（最初にシュタインによって証明された）ナッシュ不等式は、ユークリッド空間から滑らかな多様体及び距離空間に至る、あらゆる設定における確率的半群の研究の鍵となるツールになった。ナッシュ＝モーザーの逆写像定理は、あらゆる種類の摂動非線形偏微分方程式を解くための強力な方法である。ナッシュとニーレンバーグの非線形偏微分方程式に関する現代のツールボックスへの広範囲に及ぶ影響をここで言い尽くすことは不可能だが、コーン＝ニーレンバーグの擬微分作用素の理論にも言及しなければならない。

ナッシュとニーレンバーグは、個々に最高峰の数学者であることに加えて、その貢献と交流を通じてお互いに影響し合ってきた。彼らが１９５０年代にクーラント数学研究所で始めた実り多い対話の成果は、今日、これまでにないほど強く感じられる。