THE ABEL PRIZE 2015

ノルウェー科学文学アカデミーは2015年のアーベル賞を、プリンストン大学のジョン・F・ナッシュ・ジュニアとニューヨーク大学、クーラント数学研究所のルイス・ニーレンバーグに、非線形偏微分方程式論とその幾何解析への応用への顕著にして独創的な貢献に対して授与することを決定した。

偏微分方程式は、物理学、化学、生物学その他の科学における諸現象の基本的法則の記述に用いられる。また、過去数十年にわたる数多くの成功例が示すように、幾何学的対象の解析にも有効である。

ジョン・ナッシュとルイス・ニーレンバーグは、根本的な問題を解き、深遠なアイデアを導入することによって、この理論の発展に主導的役割を果たしてきた。彼らの画期的な成果は、汎用性が広く且つ強固な手法へと発展し、非線形偏微分方程式の研究に必要不可欠な技法となった。その影響は、滑らか及び滑らかでない設定における、基本的な存在性についての結果から解の定性的研究に至る、あらゆる分野に見られる。これらの結果は偏微分方程式の数値解析にとっても関心が持たれるところである。

等長埋め込み定理は、内在的幾何学をユークリッド空間の部分多様体として実現する可能性を示し、これらの発展を

の理論の発展に主導的役割を果たしてきた。彼らの画期的な成果は、汎用性が広く且つ強固な手法へと発展し、非線形偏微分方程式の研究に必要不可欠な技法となった。その影響は、滑らか及び滑らかでない設定における、基本的な存在性についての結果から解の定性的研究に至る、あらゆる分野に見られる。これらの結果は偏微分方程式の数値解析にとっても関心が持たれるところである。

等長埋め込み定理は、内在的幾何学をユークリッド空間の部分多様体として実現する可能性を示し、これらの発展を動機付けた。ナッシュ埋め込み定理は２０世紀の幾何解析の最も独創的な成果の一つである。あらゆるリーマン幾何学がユークリッド空間の部分多様体として滑らかに実現されうることを証明して、ナッシュの滑らかな場合(C^∞)の定理はリーマンの内在的視点と古くからの外在的アプローチの等価性を確立した。カイパーによって改良されたナッシュの連続微分可能な場合(C^1)の埋め込み定理は、ガウス曲率のような幾何学的不変量によって禁じられているように最初は思われる埋め込みの実現可能性を示す。この定理はグロモフの凸積分の理論全体の核心となっており、また非圧縮性流体の正則性の理解における近年の目覚しい進歩にも寄与している。ニーレンバーグは、指定されたガウス曲率あるいはリーマン計量を持つ球面 S^2 の R^3 への埋め込みに関する彼の基本的定理により、、ミンコウスキーとワイルの古典的な問題を解いた。（後者は同時期にポゴレロフによっても扱われた。）問題が発展途上の領域を代表するものであったがゆえに、そして創り出された方法が更なる応用に適するものであったがゆえに、これらの解答は重要であった。

多様体を実代数多様体として実現するというナッシュの業績と複素構造に関するニューランダー＝ニーレンバーグの定理は、更に、この二人の受賞者の幾何学への影響を描き出している。

正則性の問題は、時には厳密な証明のために、また時には解についての貴重な定性的洞察をもたらすゆえに、偏微分方程式の研究において日常的な懸案である。ナッシュがデ・ジョルジと時を同じくして、係数に関する正則性の仮定なしに一般次元での線形楕円型方程式の解に関する最初のヘルダー評価を証明したのは、この分野において画期的なことであった。何にも増して、これは解析的楕円型積分汎関数の最小化関数の解析性についてのヒルベルトの第十九問題に対する解答へとつながったのである。ナッシュの証明の数年後、ニーレンバーグはアグモン及びダグリスとともに、L^pデータを持つ線形楕円型方程式の解の幾つかの革新的な正則性の評価を確立した。これは古典的なシャウダーの理論を拡張し、このようなデータの可積分条件がある状況への応用に極めて有用である。これらの業績は現代の正則性理論の基礎となり、以来、この理論は、非常に粗くなめらかでない状況においても解析、幾何学及び確率に応用されて、目覚しい発展を遂げてきた。

対称性も非線形微分方程式の解に関して、その定性研究と数値計算の簡略化の両方に、不可欠な情報を提供している。この分野における最も素晴らしい成果の一つは、ニーレンバーグがガイダス及びニーと協力して成し遂げた。彼らは広範なクラスの非線形楕円型方程式のそれぞれの正の解が方程式自体に存在するのと同じ対称性を提示することを示したのである。

ナッシュとニーレンバーグによって証明された成果は、意図された問題の解答の域をはるかに超えて、非常に有用なツールとなり、更なるコンテクストにおいて幅広く応用されてきた。これらのツールの中で最もよく知られているのは、ガリアード＝ニーレンバーグの不等式とジョン＝ニーレンバーグの不等式を含む、ニーレンバーグによる補間不等式である。ジョン＝ニーレンバーグの不等式は、有界平均振動関数がどれだけその平均値から逸脱し得るかを統括

し、ハーディー空間 H^1 と BMO 空間の予想外の双対性を表現する。ナッシュ＝デ・ジョルジ＝モーザーの正則性理論と（最初にシュタインによって証明された）ナッシュ不等式は、ユークリッド空間から滑らかな多様体及び距離空間に至る、あらゆる設定における確率的半群の研究の鍵となるツールになった。ナッシュ＝モーザーの逆写像定理は、あらゆる種類の摂動非線形偏微分方程式を解くための強力な方法である。ナッシュとニーレンバーグの非線形偏微分方程式に関する現代のツールボックスへの広範囲に及ぶ影響をここで言い尽くすことは不可能だが、コーン＝ニーレンバーグの擬微分作用素の理論にも言及しなければならない。

ナッシュとニーレンバーグは、個々に最高峰の数学者であることに加えて、その貢献と交流を通じてお互いに影響し合ってきた。彼らが１９５０年代にクーラント数学研究所で始めた実り多い対話の成果は、今日、これまでにないほど強く感じられる。