Niels Henrik Abel

Karl Egil Aubert
Matematisk institutt
Blindern, Oslo 3, Norge

I årenes løp er det blitt skrevet biografiske artikler om Abel på en rekke språk. Det er også kommet hele bøker om ham. Mest kjent for nordiske lesere er vel her bøkene til C. A. Bjerknes [1] fra 1880 og Øystein Ores bok [2] fra 1954. For så vidt skulle det ikke eksistere noe stort behov for å føye en ny artikkel til rekken av alle de tidligere. Men mange unge matematikkinteresserte kommer vel ikke så lett i kontakt med denne tidligere litteratur om Abel og vil kanskje også lettere fatte interesse for en nyskrevet artikkel. Det er på denne bakgrunn, sammen med at det i år er 150 år siden Abel døde, at »Normat« har ønsket å inkludere Abel i en serie om avdøde nordiske matematikere.

Abels liv var fylt av matematikk. Likevel har hans korte og hektiske livsløp en generell menneskelig interesse som når langt ut over matematikernes krets. Noe av denne interesse knytter seg nok til at Abel døde så ung – bare $26\frac{1}{2}$ år gammel. Dette gir hans matematiske innsats en spesiell dramatikk og nimbus. Det som imidlertid særlig betar en når det gjelder Abels liv, er de ytre vanskeligheter som det bød på – og den måten han møtte disse vanskeligheter på. Ingen som har lest Abels mange brev, skrevet i utlandet til hans nærmeste bekjente hjemme, vil kunne forbli uberørt av det rent menneskelige innhold i disse brevene. Man kan vanskelig unngå å få sympati for den enkelhet, varme og beskjedenhet som strømmer fra disse brevene. Til tross for at de ytre omstendigheter i hans liv hadde sine meget mørke sider, maktet han likevel å beholde en gjennomgående optimisme. Hans vedvarende pengesorger og de mangeartede bekymringer som hans nærmeste familie bragte ham, ble nok for en stor del satt til side og overskygget av den nærmest kontinuerlige skaperglede som han må ha befunnet seg i.

Navnet Abel synes å ha sin opprinnelse i stedet Abild i Sønderjylland. Herfra kom på 1600-tallet den første representant for Abel-slekten i Norge. Det var Mathias Abel (1620-1664) som først var byfogd i Trondheim og senere fikk en høy stilling innen den militære administrasjon i Norge. Hans etterkommere ble for en stor del embetsmenn og da særlig prester. Matematikerens bestefar Hans Mathias Abel (1738-1803) var prest i Gjerstad, en bygd i Aust-Agder. Hans sønn – og altså Niels Henriks far – Søren Georg Abel (1772-1820) utdannet seg likesom faren til prest i København. Han ble etter fin eksamen i både teologi og filologi farens assistent i Gjerstad – bare 20 år gammel. Begge disse hadde meget allsidige interesser og en virkelyst som gikk langt ut over selve prestegjerningen. Særlig gjaldt dette Niels Henriks far som likesom bestefaren hadde en utpreget interesse for utdannelse og undervisningsspørsmål både når det gjaldt barn og voksne. I opplysningstidens ånd dannet han lesesirkler for å innføre lokalbefolkningen i den moderne europeiske literatur. Han var en vittig, intelligent og beleven mann med utpregede politiske interesser og ambisjoner. Han endte da også opp på Stortinget etter å ha vært med i forhandlingene om ny grunnlov i 1814. Men så begynner det – litt uforklarlig – å gå raskt nedover bakke med Søren Georg Abel. Han kommer i økonomiske vanskeligheter, mister populariteten i sitt sogn og begynner å drikke. Han blir gjenvalgt til Stortinget i 1818, men lager her litt av en skandale som nesten leder til riksrett. Som en nedbrutt og desillusjonert mann vender han tilbake til sitt prestekall i Gjerstad. Han tar nå mer og mer til drikk og dør i 1820, bare 48 år gammel.

Sønnen Niels Henrik Abel ble født 5. august 1802 på Finnøy ved Stavanger i en tid da alt fortonet seg meget lysere for den unge begavede prest Søren Georg Abel. Han hadde giftet seg med den 19-årige Anne Marie Simonsen i 1799 samtidig som han hadde mottatt et kall til prest i Finnøy. Etter farens død i 1803 reiser familien tilbake til Gjerstad idet Søren Georg blir utnevnt til sin fars etterfølger der. Niels Henrik var nest eldst i en søskenflokk på seks, fem brødre og en søster. Om Niels Henriks mor vet vi ikke så svært meget, og det som synes å ha festnet seg for ettertiden er av negativ art. Også hun tok mer og mer til drikk og bekymret deg lite for sine barn. Ansvaret for de yngre søsken kom etterhånden til å hvile på Niels Henriks skuldre.

Det er patetisk å se hvorledes farens – Søren Georgs – raskt nedadgående løpebane i tid faller nøyaktig sammen med sønnen Niels Henriks like raskt oppadstigende løpebane. Det var i 1818 at Søren Georg vender nedbrutt tilbake til Gjerstad, samtidig som Niels Henrik begynner å vise de første definitive tegn på sin eksepsjonelle matematiske begavelse. Allerede i 1815 – bare 13 år gammel – hadde han dratt hjemmefra for å begynne på Katedralskolen i Oslo.

Det var i 1818 at det inntraff en begivenhet ved Katedralskolen som kom til å få en avgjørende innflytelse på Niels Henriks liv. Inntil da hadde han hatt en matematikklærer ved navn Hans Peter Bader, en temmelig hensynsløs og brutal lærer som yndet å slå og plage sine elever. Selv om Niels Henrik allerede da gjorde det bra i matematikk, ble også han slått, og høsten 1816 forlot han midlertidig skolen fordi han ikke kunne utstå Baders tyranni. En gang gikk Bader for langt, idet han slo en av elevene (forøvrig sønn av en stortingsrepresentant) så kraftig at dennes død 8 dager senere ble satt i direkte forbindelse med avstraffelsen. Dette førte til at Bader øyeblikkelig ble suspendert fra sin stilling, og Abel fikk Bernt Michael Holmboe som ny matematikklærer. Den unge entusiastiske Holmboe ble en meget betydningsfull inspirasjonskilde for Abel. Ved Holmboe's interessevekkende undervisning og de videregående bøker som Abel fikk låne av ham, gjorde Abel meget raske fremskritt og begynte snart å angripe problemer som på den tiden var uløste. Abel leste i gymnasietiden arbeider av Euler, Poisson, Gauss og spesielt Lagrange. Men han studerte også anvendte matematikere som Newton, Lalande og d'Alembert. I det hele en imponerende og krevende meny for en 16-åring. Holmboe var naturlig nok begeistret for sin nye elev og venn og brukte de sterkeste ord i eksamensprotokollen om ham: »Med det mest utmerkede geni forener han en utilfredsstillelig iver og interesse for matematikken så at han visstnok om han lever, vil bli en stor matematiker.« Men det var selvfølgelig ikke like populært hos de øvrige lærere at Abel fra nå av ignorerte fullstendig alle andre fag enn matematikk – og fikk tilsvarende dårlige karakterer i disse fag. Han ble da også bare oppflyttet »på prøve«.

Det var under Abels to siste skoleår at han for alvor begynte å prøve seg på egen hånd med den tids uløste problemer. Et av hovedproblemene gjaldt muligheten for å løse femte-grads likninger ved samme type formeluttrykk som en allerede kjente til for likninger av første, annen, tredje og fjerde grad. Det vil si å skrive røttene i en femte-grads likning

$$a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5 = 0 \tag{1}$$

som et uttrykk i koeffisientene a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 bygget opp ved å anvende de fire elementære regningsarter samt rotutdragninger.

Abel mente først at han hadde funnet et positivt svar på dette problemet, og Holmboe kunne ikke finne noen feil i Abels formler. Abels løsning ble også forelagt en av de to professorene i matematikk ved Universitetet i Oslo – Christopher Hansteen. Hansteen var først og fremst geofysiker, med jordmagnetismen som sin store interesse. Det var vel derfor ikke så rart at heller ikke han kunne finne noe galt i Abels resonnementer. Det neste skritt var å sende Abels manuskript til professor Degen i København, som vel var Nordens fremste matematiker på den tiden. Heller ikke Degen kunne oppdage noen direkte feil, men viste likevel en viss skepsis overfor riktigheten av Abels resultat. Han ønsket at Abel skulle gi et mer detaljert bevis sammen med en numerisk illustrasjon for et spesielt valg av koeffisientene i (1). (Hvis Degen f.eks. hadde bedt Abel om å anvende sin generelle løsning på likningen $x^5-x-1=0$, vet vi jo idag at Abel ville kommet i vanskeligheter. For denne likningen kan *ikke* »løses ved rottegn« slik problemet var stillet.)

I tillegg til sine rosende bemerkninger om Abels arbeide over femtegradlikningen antydet imidlertid Degen at Abel heller burde bruke sin begavelse på mer fruktbare problemer. Han skriver i sitt svar til Hansteen: »Neppe kan jeg ved denne anledning undertrykke det ønske at den tid og de åndskrefter Hr. Abel skjenker en i mine øyne noe steril gjenstand, måtte ytes et emne hvis utdannelse vil ha de viktigste følger for hele analysen og dens anvendelse på dynamiske undersøkelser, jeg mener de *elliptiske transcendenter.* Ved tilbørlig anlegg for undersøkelser av dette slag vil den alvorlige gransker ingenlunde bli stående ved disse ellers i og for seg selv høyst merkverdige funksjoners mange og smukke egenskaper, men oppdage Magellânske gjennomfarter til store partier av et og samme uhyre analytiske ocean.«

Det er all grunn til å tro at denne oppfordringen fra Degen har påskynnet og stimulert den store interesse som Abel senere viste for elliptiske funksjoner. I tilbakeblikk må en jo si at Degens poetiske uttrykk om »Magellanske gjennomfarter« var svært så profetisk og dekkende for det som Abel senere gjorde på dette området. Men Abel oppga på ingen måte sitt arbeide med femtegradslikningen. Ved numeriske eksempler kunne han selv påvise at den løsning han hadde funnet, umulig kunne gjelde for *alle* femtegradslikninger.

Da Abel skulle starte sine studier ved Universitetet i Oslo høsten 1821, sto han i en meget vanskelig økonomisk situasjon. Faren var død, og moren var ute av stand til å sørge skikkelig for selv de minste barna – langt mindre sende penger til Niels Henrik i Oslo. Det som reddet ham, var at han fikk gratis innlosjering på studenthjemmet »Regensen« og at noen av de professorene som kjente Abels eksepsjonelle begavelse, gikk sammen om å gi ham en personlig støtte. Det var blant annet matematikkprofessorene Hansteen og Rasmussen samt universitetets rektor Niels Treschow. I tillegg til dette fikk han også tillatelse til å innlosjere sin yngre bror Peder på sitt rom i Regensen. Forøvrig måtte Niels Henriks beskjedne »stipendium« også rekke til det øvrige underhold av Peder.

Abels første trykte arbeider kom i 1823 i »Magasin for Naturvidenskaben«, som var stiftet samme år og var det første naturvitenskapelige tidsskrift i Norge. Allerede på dette tidspunkt begynte uhellet å forfølge Abel når det gjaldt publikasjonen av noen av hans fremste arbeider. Hans trolig beste arbeide fra denne første tiden er nemlig sporløst forsvunnet. Det gjaldt et arbeide som angivelig skulle angi en generell metode for å avgjøre om et ubestemt integral (en antiderivert) av en gitt funksjon kan uttrykkes ved de kjente elementære funksjoner. Dette var Abels første arbeide skrevet på fransk, nok et signal om at han selv betraktet det som mer betydningsfullt. Abel hadde gitt dette arbeidet til Hansteen med den hensikt å få det trykt. Men dets skjebne ble bare å sirkulere som et bilag til de dokumenter som skulle sikre Abel et stipendium til en lengre utenlandsreise. Dette arbeidet stammet fra vinteren 1822-23, men fortsatte å sirkulere til ut i 1824 da det synes å ha forsvunnet sporløst i et eller annet arkiv. Det er tydelig at Abel var meget interessert i å få dette arbeidet trykt for å ha det med seg som en slags »adgangsbillett« – noe å vise for seg på den store planlagte utenlandsreise. I motsetning til den mer velkjente forsvinning av Abels store Pariser-manuskript er det ingen spor etter dette manuskriptet om integrasjon, og en vet idag dessverre ikke noe presist om hva det inneholdt. Våre dagers matematikere vil vel ryste noe uforstående på hodet over den mildhet som Abel viste overfor neglisjeringen av to av hans hovedmanuskripter. Det er nemlig intet som tyder på at han noensinne rettet en forespørsel til mottagerne av manuskriptene for å høre hvordan det gikk med dem.

Abels første utenlandsreise var en tur til København sommeren 1823, understøttet med et stipendium på 100 daler gitt av Kollegiet ved Universitetet i Oslo. Det var på denne turen at Abel traff Christine Kemp som han senere forlovet seg med. Forøvrig inneholder Abels brev til Holmboe fra København interessante opplysninger om de forskjellige problemer som Abel nå arbeider med. Han nevner spesielt at han har arbeidet med den kjente Fermats hypotese: Å bevise at likningen

$$x^n + y^n = z^n$$

ikke har noen løsninger i hele tall x, y, z (alle $\neq 0$) når n er et helt tall $\geqq 3$. Dette er som kjent fremdeles et uløst problem, men Abel fant at *om* løsninger eksisterer, må de ha en spesiell form som betinger at løsningene i alle fall må være »svært store«.

Fra disse brevene til Holmboe fra København er det også tydelig at Abel allerede har selve nøkkelen til teorien for de elliptiske funksjoner, nemlig å gå over fra de elliptiske integraler til å betrakte de omvendte (elliptiske) funksjoner som disse integralene definerer. På grunn av Abels mange andre prosjekter måtte redigeringen av denne grunnleggende idéen vente i hele 4 år. Først i 1827 ble første delen av det store arbeidet »Recherches sur les fonctions elliptiques« publisert i Crelles journal. Som vi senere skal se, fikk denne forsinkelsen atskillig betydning med hensyn til vurderingen av prioritetsforholdene mellom Abel og Jacobi.

I tiden etter hjemkomsten fra København er det tydelig at Abels matematiske evner og originalitet virkelig kommer til full utfoldelse. Han har på ingen måte forlatt sitt første store problem fra skoletiden, løsningen av femtegradslikningen og det er på denne tiden at han redigerer sitt første knappe utkast til beviset for at en slik likning i alminnelighet *ikke* kan løses ved rottegn. Knappheten i redigeringen skyldes først og fremst at han får den trykt på egen bekostning på Grøndahls forlag i Oslo. De 6 sidene han har råd til å spandere, gir ikke noe vellykket resultat, og avhandlingen vekker da også påfallende liten interesse blant datidens matematikere – i den utstrekning de i det hele tatt er oppmerksom på den. Abel var heller ikke klar over at italieneren Ruffini allerede 25 år tidligere hadde levert et umulighetsbevis selv om dette nok hadde større svakheter enn Abels første bevis. Men Abel kom ved et par senere anledninger tilbake til dette beviset i en mer utførlig og fullt ut stringent form.

Som allerede nevnt, hadde Abel sannsynligvis fått den avgjørende idéen om omvendingen av de elliptiske integraler tidlig i 1823. Vi kan tilsvarende tidfeste unnfangelsen av idéen til det generelle »Abels (addisjons)teorem« til tidlig i 1824. I et brev til Degen i mars 1824 skriver Abel om det tidligere omtalte arbeide om integrasjon (som allerede kanskje var blitt somlet bort uten at Abel visste noe om det på dette tidspunkt). Her nevner han også en formel for integraler av generelle algebraiske funksjoner som utvivlsomt er en foreløpig utgave av Abels teorem.

Abels store utenlandsreise som startet fra Oslo i september 1825 og endte med tilbakekomst i mai 1827, ble på mange måter den store ytre begivenheten i Abels liv. Gjennom hans egne og hans reisekameraters brev kan vi følge reiseruten: Oslo – København – Lübeck – Hamburg – Berlin – Leipzig – Freiburg – Dresden – Praha – Wien – Graz – Trieste – Venedig – Fusina – Padua – Verona – Bosen – Innsbruck – Basel – Lyon – Paris – Brüssel – Liege – Aachen – Frankfurt – Köln – Kassel – Magdeburg – Berlin – København – Oslo. En tidkrevende og anstrengende reiserute når man tenker på at den for det meste ble foretatt med hestedrosjer (»diligenser«) – ofte i dårlig vær og i trekkfulle vogner. Man kan vel saktens spørre seg om ikke påkjenningen med denne lange reisen kan ha bidratt til å undergrave Abels helse og legge frøet til den sykdom som snart skulle melde seg. Vi vet blant annet at Abel skrantet og oppsøkte en lege i Paris.

De to hovedstoppesteder på turen var Berlin og Paris. Abel kom aldri til Göttingen og Gauss slik planen hele tiden hadde vært. Det viktigste som skjedde med Abel på hans reise var nok alt i alt møtet med Geheimrat Crelle i Berlin. Abel skriver begeistret hjem om Crelle – som på sin side snart forsto hvilken ekstraordinær begavelse han var kommet i kontakt med. Crelle var en meget dynamisk personlighet. Han var utdannet som ingeniør og la blant annet planene for en storstilet vei- og jernbanebygging i Preussen i årene 1820-1830. Matematikken var imidlertid hans store lidenskap og hobby, og all hans fritid gikk med til matematiske studier. Allerede før Crelle traff Abel, hadde han hatt planer om å starte det første faste tyske matematiske tidsskrift. Møtet med Abel synes å ha påskyndet Crelles planer, og den første årgengen av »Journal für die reine und angewandte Mathematik« fra 1826 inneholder da også hele 6 avhandlinger av Abel. I Crelle hadde Abel fått en beundrer og en hjelper som kom til å bety meget for ham.

Fra tiden i Berlin høsten 1826 dukker det opp et nytt interesseområde hos Abel, nemlig analysens grunnlag eller mer presist: rekkers konvergens. Abel hadde inntil da selv vært del av en formell analytisk tradisjon – en tradisjon hvor sjonglering med formler var satt i høysetet til fortrengsel for resonnementer, begreper og grunnleggende idéer. Selv om denne tradisjon etter differensial- og integralregningens gjennombrudd hadde ført til en uhyre rik periode i matematikkens historie (med Euler som sin fremste representant) var tiden nå likevel inne for mer refleksjon og konsolidering. I et kjent brev til Holmboe fra

Berlin skriver Abel meget opprømt og frodig om dette: »Divergente rekker er i det hele noe fandenskap, og det er en skam at man våger å grunne noen demonstrasjon derpå. Man kan få frem hva man vil når man bruker dem, og det er dem som har gjort så megen ulykke og så mange paradokser. Kan man tenke seg noe skrekkeligere enn å si at

$$0 = 1-2^n+3^n-4^n+\ldots\ldots.$$

når n er et helt positivt tall? Risum teneatis, amici [Venner, kan dere holde dere fra å le (sitat fra Horats)]. Jeg har i det hele tatt fått øynene opp på en meget forbausende manér, ti når man unntar de aller enkleste tilfelle, f.eks. de geometriske rekker, så gis det i hele matematikken nesten ikke en eneste uendelig rekke hvis sum er bestemt på en streng måte. Med andre ord det viktigste av matematikken står uten begrunnelse. Det meste er riktig, det er sant, og det er overordentlig forunderlig. Jeg bestreber meg for å søke grunnen dertil. En overmåte interessant oppgave.«

Når Abels hovedarbeide på dette området ble fokusert om noe så spesielt som binomialrekken, er ikke dette først og fremst å oppfatte som en enestående interesse for denne spesielle rekken, men som et viktig og velegnet eksempel hvor Abel kunne demonstrere sine generelle kritiske synspunkter på rekke-konvergens og utvikle et generelt grunnlag som også ville være anvendelig i mange andre situasjoner. Det er f.eks. her vi finner det som idag går under navnet av Abels konvergenskriterium. En legger forøvrig merke til at Abel etter å ha prist Cauchy's stringens likevel på en meget mild måte kniper ham i en relativt alvorlig feil angående uniform konvergens (se s. 224-225 i [3]). Begrepet uniform konvergens var ikke fullstendig avklaret på denne tiden, men det er tydelig at Abel her var kommet lengre enn Cauchy.

Oppholdet i Paris – som opptok det siste halve året av 1826 – ble nok ikke det Abel hadde ventet seg. Paris måtte regnes som verdens matematiske sentrum på den tiden, men Abel fikk liten kontakt med matematikerne der. Før ankomsten i Paris hadde de siste fire månedene hovedsakelig bestått av reising med liten ro til arbeide. I Paris har Abel igjen en meget intens arbeidsperiode og påbegynner og fullfører en rekke av sine mest fundamentale arbeider innenfor områdene likningsteori, elliptiske funksjoner og generelle algebraiske funksjoner. Viktigst blant disse er det store arbeidet som inneholder »Abels addisjonsteorem«. Han er selv tilstede i det franske akademi den 30. oktober 1826 da dette arbeidet »Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes« blir fremlagt til trykning av Fourier og hvor Cauchy og Legendre blir utsett til å avlegge rapport om avhandlingen. Dette er nok det mest berømte blant alle Abels arbeider – også på grunn av manuskriptets brogete skjebne. Mens Abel går og venter på Cauchy's og Legendre's dom, legger Cauchy den bare til side, og Legendre har visstnok ikke engang hatt den i hendene. Trolig under påtrykk fra blant annet Jacobi undertegner Cauchy og Legendre en rapport som er skrevet i juni 1829 – altså etter Abels død. Dette gir klarsignal for trykking, men da Cauchy i forbindelse med julirevolusjonen i 1830 må dra i landflyktighet, blir saken igjen glemt. Etter diverse nye påtrykk blir avhandlingen endelig trykt i 1841. Under korrekturlesingen forsvinner imidlertid manuskriptet igjen. Det kommer først til rette 110 år senere da Viggo Brun finner det i et bibliotek i Firenze i 1951! (For nærmere beskrivelse av dette se [2], [4] og [5].

Akademiets og Cauchy's opptreden i denne saken ble sterkt kritisert, ikke minst av Jacobi som kjente innholdet av Abels Pariseravhandling. Men også Galois ga fra fengslet på det sterkeste uttrykk for sin kritikk av Akademiets behandling av Abel. Dette fordi det samme også hendte ham selv, og det på en mer opprørende måte enn for Abels vedkommende. Galois skriver blant annet: »Men jeg må fortelle hvordan manuskriptene så ofte kommer på avveie i skuffene til medlemmene av Instituttet skjønt det er i sannhet uforståelig at slikt enda skal kunne foregå blant de menn som alt har Abels død på sin samvittighet. Det er ikke min hensikt å sammenlikne meg med denne berømte matematiker, så det må være tilstrekkelig å fortelle at min avhandling om algebraiske likninger i endelig form ble innlevert til Académie des Sciences i februar 1830, mens et utdrag var blitt sendt i 1829, at ingen rapport er blitt avgitt og at det har vært umulig for meg å få manuskriptet igjen.« For republikaneren Galois var forøvrig dette del av en mer generell politisk kritikk mot »det etablerte«, her representert ved vitenskapsakademiet.

Bare noen dager etter at Abels store Pariseravhandling er presentert i Akademiet, fullfører han et arbeide om likningsteori. Etter flere års modning hadde Abels idéer også på dette området antatt en meget mer omfattende karakter enn bare det å være rettet mot uløsbarheten av femtegradslikningen. I et brev til Holmboe fra Paris gir han antydninger som peker i samme retning som Galois' generelle undersøkelser: »Jeg arbeider nå med likningsteori, mitt yndlingstema, og er endelig kommet så vidt at jeg ser utvei til å løse følgende alminnelige problem: Bestemme formen av alle algebraiske likninger som lar seg løse algebraisk. Jeg har funnet en uendelig mengde av 5te, 6te, 7de etc. grad, som man ikke har luktet inntil nå. Med det samme har jeg den direkteste oppløsning av likninger av de 4 første grader med tydelig innsikt i hvorfor nettopp disse lar seg løse og ingen andre.« Bourbaki [6] (s. 104-105) påpeker også hvor nær Abel her kommer til Galois' undersøkelser et par år senere.

Klarere og klarere avtegner det seg hos Abel en mer moden forskerpersonlighet som bryter ganske radikalt med den mer formelle og regnemessige tradisjon som går forut for Abel. Dette viser seg ikke bare i Abels interesse for analysens grunnlag, men i minst like høy grad i hans problemstillinger i likningsteori og i hans måte å behandle teorien for algebraiske funksjoner. På det sistnevnte området representerer Abel i høyere grad enn f.eks. Jacobi en viktig etappe i en historisk utvikling mot en prinsipiell avklaring – hvor det neste radikalt nye skritt taes av Riemann.

Samtidig som Abel hadde en uhyre fruktbar og intens arbeidstid i Paris, hadde han også grunn til bekymringer for fremtiden. Ikke minst gjaldt det spørsmålet om en fast stilling etter hjemkomsten, men også mer akutte pengesorger sammen med bekymringer for sin familie, sin forlovede – og kanskje også helsen.

Etter hjemkomsten – over Berlin – til Oslo i mai 1827 har Abel en siste intens – ja nærmest febrilsk arbeidsperiode i $1\frac{1}{2}$ år frem til januar 1829 da han ikke lenger kan skjule sin alvorlige sykdom – tuberkulosen – og blir sengeliggende etter julefeiringen på Froland verk ved Arendal. Denne tiden omfattet først og fremst det som ofte er blitt kalt »kappestriden med Jacobi«, d.v.s. utbyggingen av teorien for elliptiske funksjoner. Som jeg allerede har nevnt, hadde Abel tidlig i 1823 tatt det første avgjørende skritt i teorien – selve omvendingen av de elliptiske integraler, men hadde enda ikke satt seg ned for å gi en samlet redigering av sine mange resultater på dette området. Omtrent samtidig med at første del av Abels »Recherches sur les fonctions elliptiques« hadde kommet i Crelles journal i september 1827, annonserer Jacobi i Astronomische Nachrichten noen »transformasjonsformler« for elliptiske funksjoner, men uten bevis. Dette gir opphav til en dramatisk utvikling som vi ikke her skal gjenfortelle, men heller henvise til kapitlet »Kappløpet med Jacobi« i Ores bok [2]. Under den hektiske tiden som fulgte, spente både Abel og Jacobi sine krefter til det ytterste, og en hærskare av nye grunnleggende resultater så dagens lys i løpet av et par år.

Egentlig var ikke det området hvor Abel og Jacobi direkte arbeidet med de samme ting særlig stort. Deres legning og interesser var forskjellige. Abel arbeidet mer generelt og algebraisk mens Jacobi angrep problemene analytisk og regnemessig. Abels hovedinnsats besto i at han også maktet å heve seg ut over den mer snevre teori for elliptiske funksjoner slik at han sammen med Riemann må regnes som grunnleggeren av den generelle teori for algebraiske funksjoner og deres integraler. Innenfor selve teorien for de elliptiske funksjoner er det først og fremst »omvendingen« av de elliptiske integraler som er sentral hos Abel – og alle de konsekvenser som følger av dette, ikke minst dobbeltperiodisiteten. Det må også nevnes at Abel er oppdageren av den såkalte »komplekse multiplikasjon«, en idé som stadig har øket i betydning frem til våre dager. Endelig slår Abel en betydningsfull bro mellom teorien for elliptiske funksjoner og teorien for algebraiske likninger i og med behandlingen av transformasjonsteorien (spesielt det såkalte divisjonsproblem) for elliptiske funksjoner. På denne måten kan han bestemme omfattende klasser av algebraiske likninger som er løsbare ved rottegn. Her løper Abels to hovedinteresser sammen på en frapperende måte. Jacobi, på sin side, vil når det gjelder elliptiske funksjoner, først og fremst bli stående som grunnleggeren av den merkelige og betydningsfulle teorien for tetafunksjoner fremstillet i hans store arbeide »Fundamenta Nova«.

På dette punkt vil det være utilbørlig ikke å nevne Gauss. For han hadde som så mange ganger ellers en finger med i spillet når det gjaldt flere av de temaer som nettopp er nevnt – selv om han ikke publiserte sine resultater. Gauss' etterlatte papirer som først ble publisert lenge etter at både Abel og Jacobi var døde, viser at han før disse to ble født (allerede i 1798) satt inne med grunnprinsippene for de elliptiske funksjoner. Under drakampen mellom Abel og Jacobi prøver Gauss' venner å påvirke ham til å publisere sine resultater. Etter at Gauss har sett Abels »Recherches«, skriver han imidlertid til Bessel: »Herr Abel har nå som jeg ser, kommet meg i forkjøpet og har tatt møyen ifra meg med hensyn til en tredjedel av disse saker. Han har slått inn på akkurat den samme vei som jeg tok i 1798, derfor er det ikke noe å forundre seg over at resultatene er blitt så like.« Og til Crelle skriver Gauss samtidig: »Da han (Abel) nå også med hensyn til fremstillingen har lagt så megen skjønsomhet og eleganse for dagen, så ser jeg meg herved aldeles fritatt for utarbeidelsen av disse samme gjenstander.« En i sannhet storsinnet og overlegen reaksjonsmåte – som vel ikke så mange andre enn Gauss kunne ha råd til.

Etter julefeiringen på Froland verk ved Arendal – ved årsskiftet 1828-29 – blir Abel alvorlig syk; så syk at han ikke kan reise tilbake til Oslo. Han blir liggende på Froland frem til sin død den 6[te] april 1929. Hans siste kraftanstrengelse gjelder addisjonsteoremet som var blitt neglisjert av matematikerne i Paris, men som han selv betraktet som sitt mesterverk. For å sikre det for ettertiden, redigerer han et to-siders arbeid om dette, datert 9. januar 1829 – og sender det til Crelle for trykking.

Helt til det siste hadde Abel bekymringer med hensyn til å få seg en fast stilling. Til tross for en rekke henvendelser til norske og svenske myndigheter fra inn- og utland forble Abel uten noe sikkert løfte om fast stilling helt til sin død. Den som lykkes best i sine bestrebelser var Crelle som etter iherdig pågåenhet og flere mislykkede forsøk endelig kunne meddele Abel at det var opprettet en stilling for ham i Berlin. Men Crelles brev var datert den 8. april, og da var Abel allerede død.

Selv om det er en noe fåfengt oppgave, er det vanskelig å la være å spekulere over hva Abel kunne ha utrettet om hans liv hadde fått en mer normal lengde – la oss si at han hadde levet i ytterligere 50 år. I tillegg til sine egne ressurser ville han da blitt en samtidig av Eisenstein, Riemann, Weierstrass, Hermite o.s.v. – og hadde kunnet nyttiggjøre seg disses resultater. På forskjellig vis representerer disse matematikerne fortsettelsen på Abels arbeider om elliptiske og algebraiske funksjoner, og vi kan bare drømme om hva det kunne ført til om Abel hadde fått anledning til å arbeide i vekselvirkning med dem. Men i stedet for å innlate meg på fruktesløse spekulasjoner av denne typen, skal jeg i steden antyde litt om den store betydning som teorien for elliptiske funksjoner har hatt for matematikkens utvikling fra Abel til våre dager.

Enkelte matematikere i våre dager kan muligens ha fått det inntrykk at teorien for elliptiske funksjoner er et litt antikvert område av matematikken, en spesiell interesse som ble dyrket i det 19de århundre – isolert fra vårt århundres begrepsmessige tankebygninger. Dette er i så fall en misoppfatning. Teorien for elliptiske funksjoner har på mer enn én måte vært et grunnleggende insitament og en veiviser for den utviklingen som har fulgt senere. Denne teorien står særdeles sentralt plassert med sterke bånd til funksjonsteori, algebraisk geometri og tallteori. Selv om de elliptiske funksjoner er spesielle – slik som f.eks. Weierstrass $\wp$-funksjon – så er de av den type uomgjengelige og »gudgitte« objekter som man har en følelse av å oppdage og ikke å oppfinne. Det er litt på samme måten som med tall som e og π, som til tross for at de ikke har noe »generelt« over seg, har en prinsipiell og allsidig betydning som peker langt ut over det skinn av »tilfeldighet« som en spesiell definisjon kan gi inntrykk av. Som vi vet, dirigerer jo Weierstrass $\wp$-funksjon (sammen med sin deriverte) langt på vei hele teorien for de elliptiske funksjoner.

I våre dagers matematiske verdensbilde er på den ene side en elliptisk funksjon identisk med en meromorf funksjon på en torus og på den annen side noe som gir opphav til en parametrisering av en (singularitetsfri) algebraisk kurve av slekt (genus) 1, på samme måte som de rasjonale funksjoner parametriserer kurver av slekt 0 (kjeglesnitt). Dermed er de elliptiske funksjoner innordnet som det sentrale ikke-trivielle eksemplet både i teorien for kompakte Riemannske flater og i teorien for abelske mangfoldigheter.

En kan også påpeke andre fundamentale utviklingslinjer som har sitt opphav i de elliptiske funksjoner. Det har i det minste vært *to* radikale skifter av synspunkter i teorien for de elliptiske funksjoner – to »kopernikanske vendinger« om vi kan uttrykke det slik. Den første »kopernikanske vendingen« var Abels omvending – overgangen fra å betrakte elliptiske integraler til å betrakte elliptiske funksjoner. Den annen »kopernikanske vending« består i at blikket skiftes fra den enkelte torus som definisjonsområde for en elliptisk funksjon til samlingen (»modulrommet«) av alle analytisk inekvivalente toruser. Hver torus har sin bestemte $\wp$-funksjon med sine bestemte koeffisienter g_2 og g_3 (se etterfølgende artikkel). Ved variasjonen over ulike toruser (eller snarere en utvidelse av denne mengden) kan g_2 og g_3 *selv* oppfattes som funksjoner, og det er dette synspunktet som ligger til grunn for teorien for *modulformer* og *modulfunksjoner*. Weierstrass-koeffisientene g_2 og g_3 er eksempler på automorfe former som hører til modulgruppen $SL_2(\mathbb{Z})$, og de spiller her til tross for sin tilsynelatende meget spesielle definisjon en liknende »kanonisk« og genererende rolle som $\wp$-funksjonen gjør det i teorien for elliptiske funksjoner.

Selv om Abel og Jacobi i sin »transformasjonsteori« er inne på slike »modulproblemer«, kommer den systematiske utviklingen av dette synspunktet først ca. 50 år etter den *første* »kopernikanske vendingen« i teorien for elliptiske funksjoner. Tilsammen har vi her en desidert hovedlinje i det 19de århundres matematikk, representert ved navn som Gauss, Abel, Jacobi, Eisenstein, Riemann, Hermite, Weierstrass, Dedekind, Kronecker, Klein og Poincaré.

Et sentralt resultat i denne utviklingen representeres av Abels addisjonsteorem. Dette skal jeg derfor utdype nærmere i en påfølgende artikkel.

Litteratur

[1] C. A. Bjerknes: *Niels Henrik Abel. En skildring av hans liv og vitenskapelige virksomhet.* Stockholm 1880.
[2] Øystein Ore: *Niels Henrik Abel. Et geni og hans samtid.* Oslo 1954.
[3] Niels Henrik Abel: *Oeuvres complètes (utgitt av S. Lie og L. Sylow).* Oslo 1881.
[4] Fr. Lange-Nielsen: *Zur Geschichte des Abelschen Theorems. Das Schicksal der Pariserabhandlung.* Norsk Mat. Tidsskr. 9 (1927), s. 55-73.
[5] Viggo Brun: *Det gjenfunne manuskript til Abels Pariseravhandling.* Nordisk Mat. Tidsskr. 1 (1953), s. 91-97.
[6] N. Bourbaki: *Éleménts d'histoire des mathématiques.* Paris 1969.